ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG VĂN HƯỜNG

CÔNG THỨC NGHIỆM CHO MỘT SỐ LỚP ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG VĂN HƯỜNG

CÔNG THỨC NGHIỆM CHO MỘT SỐ LỚP ĐA THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu **1**

Chương 1. Nghiệm và số nghiệm của phương trình đa thức **3**

1.1 Công thức nghiệm của đa thức có bậc nhỏ và nghiệm hữu tỷ . . . 3

1.2 Quy tắc dấu Descartes và Định lý Sturm về số nghiệm thực của đa thức 12

Chương 2. Phép biến đổi Tschirnhaus và ứng dụng **21**

2.1 Phương pháp biến đổi Tschirnhaus 21

2.2 Nghiệm đa thức $ax^{2\mu} + bx^{\mu} - x^{\nu} + c = 0$ 29

Chương 3. Phương pháp giải tích và nghiệm xấp xỉ **35**

3.1 Chặn các nghiệm 35

3.2 Phương pháp xấp xỉ Newton và Phương pháp xấp xỉ Müller . . . 40

Kết luận **45**

Tài liệu tham khảo **46**

Mở đầu

Tìm hiểu công thức nghiệm của các đa thức một biến là bài toán rất quan trọng trong toán học. Từ lâu người ta đã biết công thức nghiệm cho các phương trình bậc $1, 2, 3, 4$. Từ công trình của Abel và Galois, người ta biết rằng có nhiều đa thức bậc 5 trở lên không có công thức đại số biểu diễn các nghiệm của nó. Bên cạnh đó vẫn có nhiều đa thức bậc cao mà nghiệm có thể biểu diễn bằng các công thức đại số. Việc tìm ra các công thức này, mặt khác, là bài toán rất khó. Trong luận văn này, dưới sự hướng dẫn của tiến sĩ Đoàn Trung Cường, chúng tôi chọn đề tài "Công thức nghiệm cho một số lớp đa thức" để làm nội dung nghiên cứu. Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu một số phương pháp tìm nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ của một số lớp đa thức bậc cao như vậy.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Nghiệm và số nghiệm của phương trình đa thức. Trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả như công thức nghiệm của các đa thức bậc $1, 2, 3$ và 4, nghiệm hữu tỉ, nghiệm bội, nguyên lý đổi dấu Descartes và định lý Sturm.

Chương 2. Phép biến đổi Tschirnhaus và ứng dụng. Phép biến đổi Tschirnhaus đưa một đa thức về một đa thức có nhiều hệ số bằng 0. Chương này trình bày phép biến đổi Tschirnhaus và một ứng dụng phép biến đổi Tschirnhaus để đưa ra các công thức nghiệm dạng căn thức lồng nhau.

Chương 3. Phương pháp giải tích và nghiệm xấp xỉ. Việc tìm tất cả các nghiệm của đa thức nói chung là ít khả thi. Thay vào đó người ta tìm cách khoanh vùng nghiệm của đa thức hoặc tất cả các nghiệm có thể của đa thức. Chương này trình bày về chặn nghiệm của đa thức, phương pháp Newton, phương pháp Müller, phương pháp số và công thức giải tích tìm nghiệm của

phương trình đại số.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Đoàn Trung Cường, đã định hướng chọn đề tài và nhiệt tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu của các thầy cô giáo trong khoa Toán Tin, cũng như các thầy cô giáo đã tận tâm giảng dạy, hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Xin cảm ơn những người thân trong gia đình và tất cả những người bạn thân yêu đã hết sức thông cảm, chia sẻ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi để tôi có thể học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn của mình.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019

Người viết luận văn

Hoàng Văn Hường

Chương 1

Nghiệm và số nghiệm của phương trình đa thức

Chương này trình bày một số kết quả cổ điển về công thức nghiệm của đa thức bậc 1, 2, 3 và 4 và về số nghiệm của đa thức.

1.1 Công thức nghiệm của đa thức có bậc nhỏ và nghiệm hữu tỷ

Với một đa thức nói chung, từ đầu Thế kỷ 19 người ta đã biết rằng không tồn tại một công thức đại số chỉ chứa căn thức để biểu diễn các nghiệm của đa thức đó. Công thức hay thuật toán tìm nghiệm chỉ tồn tại trong một số trường hợp đa thức có bậc nhỏ hoặc có dạng đặc biệt hoặc lớp nghiệm đặc biệt. Trong tiết này chúng tôi nhắc lại công thức nghiệm trong trường hợp đa thức bậc 1, 2, 3, 4 và cách tìm nghiệm hữu tỷ.

Cho k là một trường, đa thức $P(x)$ với biến x và hệ số trong k có dạng

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

trong đó $a_0, \ldots, a_n \in k$. Nếu $P = 0$, tức là $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, thì ta nói rằng đa thức P có bậc là $-\infty$, ký hiệu $\deg P = -\infty$. Nếu $P \neq 0$ và $a_n \neq 0$ thì ta nói rằng đa thức P có bậc là n, ký hiệu $\deg P = n$. Hạng tử a_nx^n được gọi là hạng tử cao nhất của P, a_n gọi là hệ số cao nhất của P. Tập các đa thức một biến với hệ số trong k được ký hiệu là $k[x]$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho đa thức $P \in k[x]$, một phần tử $\alpha \in k$ được gọi là không điểm (hay nghiệm) của đa thức P nếu $P(\alpha) = 0$.

Các phương trình có bậc càng lớn thì việc giải càng khó, kể cả chỉ xét số nghiệm hay một số tính chất của nghiệm. Dưới đây ta nhắc lại công thức nghiệm cổ điển của các phương trình đa thức có bậc 1, 2, 3 và 4. Để tiện trình bày, ta giả sử các phương trình này có hệ số trong trường các số thực $\mathbb{R}$. Trường hợp phương trình với hệ số trong trường l bất kỳ được giải tương tự với lưu ý về điều kiện khai căn và đặc số của trường.

Phương trình bậc nhất (hay phương trình tuyến tính) là phương trình đa thức có dạng

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$

Phương trình này có một nghiệm $x = -b/a$.

Phương trình bậc hai là phương trình đa thức có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{1.1.1}$$

Bằng biến đổi quen thuộc, phương trình (1.1.1) tương đương với phương trình

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{1.1.2}$$

Ký hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi nó là biệt thức của phương trình. Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực (có thể trùng nhau)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình không có nghiệm thực mà chỉ có hai nghiệm phức

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Phương trình bậc ba

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0, \alpha \neq 0. \tag{1.1.3}$$

Do $\alpha \neq 0$ nên chia hai vế cho α, ta đưa phương trình về dạng

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1.1.4}$$

Bằng cách đặt
$$x = y - \frac{p}{3}$$
ta đưa phương trình (1.1.4) về phương trình dạng
$$y^3 + ay + b = 0, \tag{1.1.5}$$
với
$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2), \quad b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r).$$
Giả sử $y \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của phương trình (1.1.5). Đặt $y = u + v$ với $u, v \in \mathbb{C}$ nào đó. Như thế v có thể chọn tùy ý. Thay vào (1.1.5) ta có
$$(u+v)^3 + a(u+v) + b = 0 \text{ hay } (u^3 + v^3 + b) + (u+v)(3uv + a) = 0.$$
Chọn u, v sao cho $3uv + a = 0$. Khi đó, ta có hệ
$$\begin{cases} u^3 + v^3 + b = 0 \\ 3uv = -a \end{cases}$$
Hệ này tương đương
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ u^3 v^3 = -\dfrac{a^3}{27}. \end{cases}$$
Như vậy u^3, v^3 là nghiệm của phương trình $t^2 + bt - \dfrac{a^3}{27} = 0$. Từ phương trình này ta tìm được u^3 và v^3, từ đó ta tìm được u, v. Khi đó, phương trình (1.1.5) có ba nghiệm
$$\begin{aligned} y_1 &= A + B, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(A+B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B), \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B), \end{aligned}$$
trong đó $i^2 = -1$ và
$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$
$$B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Ba nghiệm trên có thể được kiểm tra như sau:

$$\begin{aligned}(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) &= (y-A-B)\big(y^2+(A+B)y+A^2-AB+B^2\big)\\ &= y^3-3ABy-(A+B)(A^2-AB+B^2)\\ &= y^3-3ABy-A^3-B^3\\ &= y^3+ay+b.\end{aligned}$$

Giả sử các hệ số p, q, r là các số thực (khi đó a và b cũng là số thực). Ta có ba trường hợp:

- trường hợp $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}>0$. Phương trình (1.1.5) một nghiệm thực $y=y_1$ và hai nghiệm phức liên hợp.
- trường hợp $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=0$, suy ra $a\le 0$. Nghiệm của phương trình (1.1.5) có các khả năng là

$$(y_1,y_2,y_3)=\begin{cases}\Big(-2\sqrt{-\frac{a}{3}},\ \sqrt{-\frac{a}{3}},\ \sqrt{-\frac{a}{3}}\Big) & \text{nếu } b>0\\ \Big(2\sqrt{-\frac{a}{3}},\ -\sqrt{-\frac{a}{3}},\ -\sqrt{-\frac{a}{3}}\Big) & \text{nếu } b<0\\ (0,\ 0,\ 0) & \text{nếu } b=0.\end{cases}$$

- trường hợp $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}<0$. Phương trình (1.1.5) có ba nghiệm thực phân biệt

$$y_k=2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2,$$

trong đó

$$\cos\phi=\begin{cases}-\sqrt{\frac{b^2/4}{-a^3/27}} & \text{nếu } b>0\\ \sqrt{\frac{b^2/4}{-a^3/27}} & \text{nếu } b<0.\end{cases}$$

Mỗi nghiệm y_k thu được tương ứng với nghiệm $x_k=y_k-p/3$ của phương trình (1.1.4). Như vậy, phương trình bậc ba hoặc là có một nghiệm thực hoặc có 3 nghiệm thực.

Ví dụ 1.1.2. Giải phương trình

$$x^3+3x^2+12x-16=0.$$

Đặt $x=y-1$ ta được

$$y^3+9y-26=0.$$

Có $\Delta = b^2 + \dfrac{4a^3}{27} = 784 > 0$, suy ra $u^3 = 27$. Chọn $u = 3, v = -1$. Suy ra $y = u + v = 3 - 1 = 2$, dẫn đến $x = 1$. Phương trình ban đầu trở thành

$$(x-1)(x^2+4x+16) = 0.$$

Do đó phương trình có 3 nghiệm

$$x = 1, x = -2 \pm 2\sqrt{3}i.$$

Phương trình bậc bốn có dạng

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varphi = 0, \alpha \neq 0.$$

Có một số cách giải phương trình này. Chúng tôi đưa ra đây cách giải ít phổ biến hơn.

Ta đưa phương trình về dạng

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

hay

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d. \tag{1.1.6}$$

Thêm $\dfrac{a^2x^2}{4}$ vào cả hai vế, ta được

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} - b\right) - cx - d.$$

Cộng vào hai vế của phương trình này với $\left(x^2 + \dfrac{ax}{2}\right)y + \dfrac{y^2}{4}$,

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b - y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right). \tag{1.1.7}$$

Chọn y sao cho tam thức bậc hai theo x ở vế phải có nghiệm kép, hay

$$\Delta = \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b - y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0,$$

hay tương đương

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - d(c^2 - 4b) - c^2 = 0. \tag{1.1.8}$$